JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 3, 369–397 (1970)

Charakterisierung bester Approximationen in normierten Vektorräumen

BRUNO BROSOWSKI UND RUDOLF WEGMANN

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik
8 München 23, Föhringer Ring 6, Deutschland

Communicated by L. Collatz

Received September 20, 1969

1. EINLEITUNG

Es sei R ein normierter Vektorraum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen und V eine nichtleere Teilmenge von R. Ein Element v_0 aus V heißt eine beste Approximation oder eine Minimallösung für ein Element f aus R bezüglich V, wenn jedes Element v aus V der Ungleichung $\|f - v_0\| \leqslant \|f - v\|$ genügt. Ausgangspunkt unserer Untersuchungen bilden die beiden Verallgemeinerungen des Kolmogoroffschen Kriteriums aus der Theorie der linearen Tschebyscheff-Approximation komplexwertiger Funktionen. Um diese Verallgemeinerungen zu formulieren, benötigen wir zunächst einige Definitionen.

Jedem Element f aus R ordnen wir die Menge

$$\Sigma_f : = \{L \in R^* : \|L\| \leqslant 1 \wedge L(f) = \|f\|\}$$

zu, die wir die Menge der Abweichungsfunktionale von f nennen. Diese Menge ist konvex und $\sigma(R^*, R)$-kompakt. Folglich hat sie Extremalpunkte. Die Menge dieser Extremalpunkte bezeichnen wir mit $\mathscr{E}_f$.

Jedem Element v_0 aus V ordnen wir die Menge der Elemente g aus R zu, für die gilt: Für jede Umgebung U von g und für alle $\epsilon > 0$ existiert eine reelle Zahl η mit $0 < \eta < \epsilon$ und ein Element g' aus U mit $v_0 + \eta g'$ aus V. Diese Menge ist ein nichtleerer abgeschlossener Kegel mit dem Scheitel 0. Wir bezeichnen diese Menge mit $\mathfrak{R}[v_0 ; V]$.

Nun lauten die beiden Verallgemeinerungen des Kolmogoroffschen Kriteriums:

GLOBALES KOLMOGOROFFSCHES KRITERIUM. *Gilt für alle v aus V die Ungleichung*

$$\min_{L \in \mathscr{E}_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v - v_0) \leqslant 0,$$

so ist v_0 eine Minimallösung für f bezüglich V.

LOKALES KOLMOGOROFFSCHES KRITERIUM. *Ist v_0 eine Minimallösung für das Element f bezüglich V, so gilt für alle h aus $\mathfrak{K}[v_0\,;\,V]$ die Ungleichung*

$$\min_{L \in \mathscr{E}_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(h) \leqslant 0.$$

Einen Beweis dieser Kriterien findet man bei Brosowski [10]. Im Falle der Approximation durch Elemente aus einer konvexen Menge sind beide Kriterien notwendige und hinreichende Bedingungen für eine Minimallösung. Jedoch sind im allgemeinen die obigen Kriterien nicht umkehrbar. Wir nennen daher eine nichtleere Teilmenge V eines normierten Vektorraumes eine Kolmogoroff-Menge 1. Art, wenn jede beste Approximation bezüglich V dem globalen Kriterium genügt, und eine Kolmogoroff-Menge 2. Art, wenn das lokale Kriterium stets eine hinreichende Bedingung für eine beste Approximation ist.

In der vorliegenden Arbeit geben wir notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß eine Teilmenge V eines normierten Vektorraumes eine Kolmogoroff-Menge 1. Art oder 2. Art ist.

Verschiedene Spezialfälle des lokalen Kolmogoroffschen Kriteriums wurden schon früher von verschiedenen Autoren angegeben, so z.B. von Meinardus und Schwedt [24] im Falle der Tschebyscheff-Approximation reell- oder komplexwertiger Funktionen, von B. Brosowski [12] im Falle der Tschebyscheff-Approximation von Funktionen mit Werten in einem Prae-Hilbert-Raum, von Arold [1] im Falle der L_1-Approximation. In seiner hier genannten allgemeinen Form wurde das lokale Kriterium erstmals von Brosowski [8] angegeben. In dieser Arbeit wurde auch gezeigt, daß jede Kolmogoroff-Menge 2. Art eine Kolmogoroff-Menge 1. Art ist. Ferner wurde in dieser Arbeit die Frage nach der Charakterisierung der Kolmogoroff-Mengen 2. Art aufgeworfen. W. Krabs [22] nennt im Falle der Tschebyscheff-Approximation reeller Funktionen eine Charakterisierung der Kolmogoroff-Mengen 2. Art, allerdings unter den zusätzlichen Annahmen, daß die Menge V Fréchet-differenzierbar von einem Parameter abhängt und daß V eine Kolmogoroff-Menge 1.Art ist. In der vorliegenden Arbeit geben wir eine allgemeine Charakterisierung der Kolmogoroffschen Mengen 2. Art (diese Charakterisierung wurde unabhängig auch von Hoffmann [20] gefunden) und zeigen als Anwendung, daß verschiedene für die Anwendungen wichtige Funktionenfamilien eine Kolmogoroff-Menge 2. Art bilden.

Das globale Kolmogoroff-Kriterium wurde im Falle eines normierten Vektorraumes für die Approximation durch Elemente aus einem linearen Teilraum von Singer [28] angegeben. Jedoch ist der Singersche Beweis für die Hinlänglichkeit dieses Kriteriums auch für beliebige Teilmengen V gültig. B. Brosowski [9] charakterisierte im Falle des normierten Vektorraumes $C[Q, H]$ die Kolmogoroff-Mengen 1. Art durch die von ihm eingeführten regulären Funktionenmengen. Ferner wurde von B. Brosowski [8, 10] in beliebigen normierten Vektorräumen das folgende Kriterium angegeben:

SATZ 1. *Eine Teilmenge V eines normierten Vektorraumes R ist genau dann eine Kolmogoroff-Menge* 1. *Art, wenn V eine α-Sonne ist.*

Dabei heißt eine Teilmenge V eine *α-Sonne*, wenn für jedes Element f in R jede Minimallösung v_0 für f bezüglich V auch eine Minimallösung für $v_0 + \lambda \cdot (f - v_0)$ mit $\lambda \geqslant 1$ ist. Man benutzt in diesem Satz zur Charakterisierung der Kolmogoroff-Mengen 1. Art eine andere approximationstheoretische Eigenschaft der Menge V. Weitere derartige approximationstheoretische Charakterisierungen der Kolmogoroff-Mengen 1.Art mit Hilfe einer Fixpunkteigenschaft der metrischen Projektion wurden von B. Brosowski [7, 13, 14] und von Brosowski, Hoffmann, Schäfer und Weber [18, 19] angegeben. Im Gegensatz dazu benutzt man im Falle $C[Q, H]$ bei der Charakterisierung der Kolmogoroff-Mengen 1. Art durch die regulären Mengen nur Eigenschaften der Menge V, ohne auf ein Approximationsproblem Bezug zu nehmen. Man hat also in diesem Fall eine geometrische Charakterisierung der Kolmogoroff-Mengen 1. Art. Es erhebt sich die Frage nach einer Verallgemeinerung des Regularitätsbegriffs auf normierte Vektorräume. Von verschiedenen Autoren sind bisher Regularitätsbegriffe (vgl. Breckner und Kolumban [2, 3] und Brosowski [8, 10]) für den Fall eines normierten Vektorraumes angegeben worden. Jedoch sind diese keine Verallgemeinerung des von Brosowski [9, 12] im Falle des Raumes $C[Q, H]$ angegebenen Regularitätsbegriffs, wie Brosowski und Weber [17] gezeigt haben. In der vorliegenden Arbeit geben wir eine neue Definition des Begriffs der regulären Menge in einem normierten Vektorraum und zeigen, daß eine Teilmenge eines normierten Vektorraumes genau dann regulär ist, wenn sie eine Kolmogoroff-Menge 1. Art ist. Mit diesem Nachweis ist klar, daß im Falle $C[Q, H]$ die beiden Regularitätsbegriffe übereinstimmen. Jedoch kann man sie nicht elementar auseinander ableiten, wie der in Abschnitt 5 gegebene Beweis zeigt. Eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von Eindeutigkeitsfragen spielt der Satz über den Durchschnitt von Extremalsignaturen (vgl. Brosowski [4, 5, 10, 11]). Wir führen im letzten Abschnitt Extremalsignaturen ein und beweisen, daß der "Durchschnittssatz" auch für die Kolmogoroff-Mengen 1. Art gültig ist. Als Anwendung ergibt sich ein hinreichendes Eindeutigkeitskriterium für Kolmogoroff-Mengen 1. Art, das im Falle der Tschebyscheff-Approximation im Raume $C[Q, H]$ auch notwendig ist. Ferner zeigen wir, daß sich ein Ergebnis von I. Singer [27] aus der Theorie der linearen Approximationen auf die Approximation durch Elemente aus Kolmogoroff-Mengen 1. Art verallgemeinern läßt.

2. Charakterisierung der Kolmogoroff-Mengen 2. Art

Es gilt der folgende

SATZ 2. *Eine Teilmenge V eines normierten Vektorraumes R ist genau dann eine Kolmogoroff-Menge 2. Art, wenn für jedes Element f aus R und v_0 aus V die folgende Bedingung* (S) *erfüllt ist:*

(S) *Gilt für ein v aus V die Ungleichung* $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$ *für jedes L aus $\mathscr{E}_f$, so gibt es ein h aus $\mathfrak{K}[v_0\,; V]$ in der Art, daß* $\operatorname{Re} L(h) > 0$ *für jedes L aus $\mathscr{E}_f$ gilt.*

Beweis. Notwendigkeit. Gegeben sei f aus R und v_0 aus V mit $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$ für jedes L aus $\mathscr{E}_f$. Da jede Kolmogoroff-Menge 2. Art eine 1.Art ist (vgl. Brosowski [8]), ist v_0 keine Minimallösung für $f + v_0$ bezüglich V. Da für Kolmogoroff-Mengen 2. Art das lokale Kolmogoroff-Kriterium hinreichend ist, gibt es ein h aus $\mathfrak{K}[v_0\,; V]$ mit $\operatorname{Re} L(h) > 0$ für jedes L aus $\mathscr{E}_f$.

Hinlänglichkeit. Gegeben sei ein Element v_0 aus V und ein Element f aus R mit der Eigenschaft

$$\min_{L \in \mathscr{E}_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(h) \leqslant 0$$

für jedes h aus $\mathfrak{K}[v_0\,; V]$. Dann folgt mit Hilfe der Bedingung (S) die Ungleichung

$$\min_{L \in \mathscr{E}_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v - v_0) \leqslant 0$$

für jedes v aus V. Wegen der Hinlänglichkeit des globalen Kolmogoroff-Kriteriums ist v_0 eine Minimallösung für f bezüglich V. Folglich ist V eine Kolmogoroff-Menge 2. Art.

Wir geben einige Beispiele für Kolmogoroff-Mengen 2. Art.

BEISPIEL 1 (Konvexe Mengen). Da für jede konvexe Menge die Inklusion

$$V \subset v_0 + \mathfrak{K}[v_0\,;\,V]$$

für alle v_0 aus V gilt, ist bereits das Element $v - v_0$ aus $\mathfrak{K}[v_0\,;\,V]$. Folglich ist die Bedingung (S) aus Satz 2 erfüllt. Wir haben somit

SATZ 3. *Jede konvexe Menge ist eine Kolmogoroff-Menge 2. Art.*

Das folgende Beispiel zeigt, daß nicht jede Kolmogoroff-Menge 2. Art konvex ist.

BEISPIEL 2 (Verallgemeinerte rationale Funktionen im Raum $C[Q]$). Es bezeichne $C[Q]$ den normierten Vektorraum der auf dem kompakten Hausdorff-Raum Q stetigen reellwertigen Funktionen versehen mit der Tschebyscheff-Norm. Für jedes Element f aus $C[Q]$ besteht die Menge $\mathscr{E}_f$ aus den sogenannten Punktfunktionalen $\epsilon \cdot L_x$, wobei sich ϵ und x aus der Beziehung

$$\epsilon \cdot L_x(f) = \epsilon \cdot f(x) = \|f\|, \; |\epsilon| = 1,$$

bestimmen. Mit den Bezeichnungen

$$M_f^+ := \{x \in Q : \quad f(x) = \|f\|\}$$

und

$$M_f^- := \{x \in Q : -f(x) = \|f\|\}$$

lautet im Falle $C[Q]$ die Bedingung (S):

(S_T) *Ist $v(x) - v_0(x) > 0$ für jedes x aus M_f^+ und ist $v(x) - v_0(x) < 0$ für jedes x aus M_f^-, so gibt es ein h aus $\mathfrak{K}[v_0\,;\,V]$ in der Art, daß $h(x) > 0$ für jedes x aus M_f^+ und $h(x) < 0$ für jedes x aus M_f^- gilt.*

Es seien U und W lineare Teilräume von $C[Q]$. Mit diesen definieren wir die Menge

$$V := \left\{\frac{u}{w} \in C[Q] : (u, w) \in U \times W \quad \text{und} \quad \underset{x \in Q}{\forall}\; w(x) > 0\right\},$$

von der wir voraussetzen, daß sie nicht leer ist. Zu beliebigen Elementen u_0/w_0 aus V, u aus U, w aus W, zu jedem $\delta > 0$ und zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\lambda_0 > 0$, für das gilt

$$\left\| \frac{u}{w_0} - w \cdot \frac{u_0}{w_0^2} - \left(\frac{u_0 + \lambda_0 u}{w_0 + \lambda_0 w} - \frac{u_0}{w_0}\right)\right\| < \delta, \qquad \frac{u_0 + \lambda_0 u}{w_0 + \lambda_0 w} \in V$$

und

$$\lambda_0 < \epsilon.$$

Folglich gilt die Inklusion

$$\left\{\frac{u}{w_0} - w \cdot \frac{u_0}{w_0^2} \in C[Q] : (u, w) \in U \times W\right\} \subset \mathfrak{K}\left[\frac{u_0}{w_0}; V\right].$$

Es seien u/w und u_0/w_0 aus V gegeben mit

$$\frac{u(x)}{w(x)} - \frac{u_0(x)}{w_0(x)} > 0 \qquad \text{für } x \text{ aus } M_f^+$$

und

$$\frac{u(x)}{w(x)} - \frac{u_0(x)}{w_0(x)} < 0 \qquad \text{für } x \text{ aus } M_f^-$$

für ein f aus $C[Q]$. Wegen $w(x) > 0$ und $w_0(x) > 0$ für x aus Q folgen die Ungleichungen

$$\frac{u(x)}{w_0(x)} - w(x) \cdot \frac{u_0(x)}{w_0^2(x)} > 0 \qquad \text{für } x \text{ aus } M_f^+$$

und

$$\frac{u(x)}{w_0(x)} - w(x) \cdot \frac{u_0(x)}{w_0^2(x)} < 0 \qquad \text{für } x \text{ aus } M_f^-.$$

Da $u/w_0 - w \cdot (u_0/w_0^2)$ aus $\mathfrak{K}[u_0/w_0 ; V]$ ist, folgt mit Hilfe von (S_T), daß V eine Kolmogoroff-Menge 2. Art ist. Im Falle dim $W > 1$ ist diese Menge nicht konvex.

Im Beweis zu Satz 2 hatten wir benutzt, daß jede Kolmogoroff-Menge 2. Art auch eine 1. Art ist. Das folgende Beispiel zeigt, daß die Umkehrung im allgemeinen nicht gilt.

Beispiel 3. Gegeben sei die (x, y)-Ebene E_2 versehen mit der Norm

$$\|(x, y)\| := \max(|x|, |y|).$$

Ferner sei

$$V := \{(x, y) \in E_2 : y = x^3\}.$$

Für das Element (0, 0) ist

$$\mathfrak{K}[(0, 0); V] = \{(x, y) \in E_2 : y = 0\}$$

Man überlegt sich leicht, daß für die Elemente $f := (0, 1)$ und $v_0 := (0, 0)$ die lokale Kolmogoroff-Bedingung erfüllt ist und daß v_0 keine beste Approximation für f bezüglich V ist.

Da es andererseits zu jedem f aus E_2 genau eine Minimallösung für f bezüglich V gibt, ist V eine Kolmogoroff-Menge 1.Art.

Besonders wichtig für die Anwendungen ist der folgende Spezialfall. Es sei P eine offene Teilmenge eines normierten Vektorraumes E und $v : P \to R$ eine Fréchet-differenzierbare Abbildung. Wir setzen

$$V := \{v_a \in R : a \in P\},$$

wobei v_a das Bild von a bezeichnet, und definieren für jedes a_0 aus P den in R enthaltenen linearen Teilraum

$$\mathfrak{L}_{a_0} := \{v'_{a_0}(b) \in R : b \in E\},$$

wobei v'_{a_0} die Fréchetsche Ableitung von v an der Stelle a_0 bezeichnet. Es gilt die Inklusion $\mathfrak{L}_{a_0} \subset \mathfrak{K}[v_{a_0} ; V]$, vgl. Lobry [23] oder Brosowski [10]. Daher gilt: Ist v_{a_0} eine Minimallösung für f bezüglich V, so gilt für jedes Element h aus $\mathfrak{L}_{a_0}$ die Ungleichung

$$\min_{L \in \mathscr{E}_{f-v_{a_0}}} \operatorname{Re} L(h) \leqslant 0. \tag{1}$$

Es erhebt sich die Frage, unter welchen Bedingungen diese Bedingung hinreichend für eine Minimallösung ist. Eine Antwort gibt der

SATZ 4. *Gegeben sei eine nichtleere Teilmenge V eines normierten Vektorraumes R, die Fréchet-differenzierbar von einem Parameter abhängt. Dann gilt: Die Bedingung* (1) *ist genau dann hinreichend für eine beste Approximation, wenn für jedes Element f aus R und für jedes Element v_{a_0} aus V die folgende Bedingung* (S_F) *erfüllt ist.*

(S_F) *Gilt für v aus V die Ungleichung* $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$ *für jedes L aus $\mathscr{E}_f$, so gibt es ein h aus $\mathfrak{L}_{a_0}$ in der Art, daß* $\operatorname{Re} L(h) > 0$ *für jedes L aus $\mathscr{E}_f$ gilt.*

Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 2.

3. KOLMOGOROFF-MENGEN 2. ART IM RAUME $C[Q, H]$

Es sei nun $C[Q, H]$ der normierte Vektorraum der auf dem kompakten Hausdorff-Raum Q definierten stetigen Abbildungen in den Prae–Hilbert-Raum H versehen mit der Tschebyscheff-Norm, die bekanntlich durch

$$\|f\| := \max_{x \in Q} \|f(x)\|_H$$

definiert ist. Nach Singer [29] haben die Extremalfunktionale der Einheitskugel im Dualraum von $C[Q, H]$ die Form

$$L_{\epsilon,x} : g \to (\epsilon, g(x)),$$

wobei ϵ aus H mit $\|\epsilon\|_H = 1$ und x aus Q fest vorgegeben ist. Für jedes Element f aus $C[Q, H]$ setzen wir

$$M_f := \{x \in Q : \|f(x)\|_H = \|f\|\}.$$

Es gilt der

SATZ 5. *Es sei V eine nichtleere Teilmenge des Raumes $C[Q, H]$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(K2) *V ist eine Kolmogoroff-Menge* 2. *Art.*

(S) *Für alle f aus $C[Q, H]$ und alle v_0 aus V gilt: Genügt ein v aus V der Ungleichung*

$$\mathrm{Re}(f(x), v(x) - v_0(x)) > 0$$

für jeden Punkt x aus M_f, so gibt es ein h aus $\mathfrak{K}[v_0 ; V]$ in der Art, daß

$$\mathrm{Re}(f(x), h(x)) > 0$$

für jedes x aus M_f gilt.

(S′) *Für alle f aus $C[Q, H]$ und für alle v_0 aus V gilt: Genügt ein v aus V der Ungleichung*

$$\mathrm{Re}(f(x), v(x) - v_0(x)) > 0$$

für alle x aus einer abgeschlossenen Teilmenge A von Q, so gibt es ein h aus $\mathfrak{K}[v_0 ; V]$ in der Art, daß

$$\mathrm{Re}(f(x), h(x)) > 0$$

für jedes x aus A gilt.

Beweis. Die Äquivalenz "(K2) $\Leftrightarrow$ (S)" folgt aus Satz 2, die Implikation "(S′) $\Rightarrow$ (S)" ist trivial. Zum Nachweis der Implikation "(S) $\Rightarrow$ (S′)" seien eine abgeschlossene Teilmenge A von Q und Elemente v, v_0 aus V und f aus R gegeben mit

$$\mathrm{Re}(f(x), v(x) - v_0(x)) > 0$$

für jedes x aus A. Nun definieren wir eine Abbildung g aus $C[Q, H]$ durch

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{a \cdot f(x)}{\|f(x)\|_H} & \text{für} \quad x \in \{x \in Q : \|f(x)\|_H \geqslant a\} \\ f(x) & \text{für} \quad x \in \{x \in Q : \|f(x)\|_H \leqslant a\}, \end{cases}$$

wobei

$$a := \inf_{x \in A} \|f(x)\|_H > 0 \quad \text{ist.}$$

Nach dem Lemma von Urysohn gibt es eine auf Q stetige reelle Funktion m mit

$$m(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in \{x \in Q : \operatorname{Re}(g(x), v(x) - v_0(x)) \leqslant 0\} \\ 1 & \text{für} \quad x \in A \end{cases}$$

und $0 \leqslant m(x) \leqslant 1$ für jedes x aus Q. Für jedes x aus $M_{m \cdot g}$ gilt dann die Abschätzung

$$\operatorname{Re}(m(x) \cdot g(x), v(x) - v_0(x)) > 0.$$

Nach der vorausgesetzten Bedingung (S) gibt es dann ein h aus $\mathfrak{R}[v_0 ; V]$ mit

$$\operatorname{Re}(m(x) \cdot g(x), h(x)) > 0$$

für jedes x aus $M_{m \cdot g}$ · Da $M_{m \cdot g}$ die Menge A enthält und da

$$m(x) \cdot g(x) = a \cdot f(x)/\|f(x)\|_H$$

für x aus A gilt, folgt auch

$$\operatorname{Re}(f(x), h(x)) > 0$$

für jedes x aus A, was zu beweisen war.

Die Bedingung (1) lautet im Falle des Raumes $C[Q, H]$: Für alle b aus E gilt die Ungleichung

$$\min_{x \in M_f} \operatorname{Re}(f(x), v'_{a_0}(b, x)) \leqslant 0. \tag{2}$$

Es gilt hier entsprechend zu Satz 5 der folgende

SATZ 6. *Es sei V eine nichtleere Teilmenge von $C[Q, H]$, die Fréchet-differenzierbar von einem Parameter abhängt, der in einer offenen Menge P eines normierten Raumes E variiert. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(K3) *Für alle f aus $C[Q, H]$ ist die Bedingung* (2) *hinreichend für eine Minimallösung.*

(S_F) *Für alle f aus $C[Q, H]$ und alle a aus P gilt: Genügt ein v aus V der Ungleichung*

$$\operatorname{Re}(f(x), v(x) - v_a(x)) > 0$$

für alle x aus M_f, so gibt es ein b aus E in der Art, daß

$$\operatorname{Re}(f(x), v_a'(b, x)) > 0$$

für alle x aus M_f gilt.

(S_F') *Für alle f aus $C[Q, H]$ und für alle a aus P gilt: Genügt ein v aus V der Ungleichung*

$$\operatorname{Re}(f(x), v(x) - v_a(x)) > 0$$

für alle x aus einer abgeschlossenen Teilmenge A von Q, so gibt es ein b aus E in der Art, daß

$$\operatorname{Re}(f(x), v_a'(b, x)) > 0$$

für alle x aus A gilt.

Satz 6 beweist man genau wie Satz 5. Die Äquivalenz "(K3) $\Leftrightarrow$ (S_F')" wurde von W. Krabs [22] im Falle $H = \mathbb{R}$, allerdings unter den zusätzlichen Bedingungen $\dim \mathfrak{L}_a < \infty$ und V eine Kolmogoroff-Menge 1. Art bewiesen.

Wir zeigen nun, daß die folgenden für die Anwendungen wichtige Funktionenklassen Kolmogoroff-Mengen 2. Art sind. Es sei V eine nichtleere Teilmenge von $C[a, b]$, die Fréchet-differenzierbar von einem Parameter abhängt. Jedem Element v aus V sei eine natürliche Zahl $n(v) \geqslant 1$ so zugeordnet, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Für alle v, v_0 aus V hat jede Differenz $v - v_0$ mit $v \not\equiv v_0$ höchstens $n(v_0) - 1$ Nullstellen in Q (globale Haarsche Bedingung).
Für alle v_0 aus V gilt $\dim \mathfrak{L}_{v_0} = n(v_0)$ *und $\mathfrak{L}_{v_0}$ genügt der Haarschen Bedingung (lokale Haarsche Bedingung).*

SATZ 7. *Eine Teilmenge V von $C[a, b]$, die der globalen und lokalen Haarschen Bedingung genügt, ist eine Kolmogoroff-Menge 2. Art.*

Beweis. Wir zeigen, daß die Bedingung (S_F') von Satz 6 erfüllt ist, die in diesem Fall lautet:

Für alle v, v_0 aus V und für jede abgeschlossene Teilmenge A von $[a, b]$ mit

$$v(x) - v_0(x) \neq 0$$

existiert ein h aus $\mathfrak{L}_{v_0}$ *mit*

$$(v(x) - v_0(x)) \cdot h(x) > 0$$

für alle x aus A.

Es sei eine abgeschlossene Teilmenge A von $[a, b]$ und v, v_0 aus V mit $v(x) - v_0(x) \neq 0$ für x aus A gegeben. Dann hat die Differenz $v - v_0$ wegen der vorausgesetzten globalen Haarschen Bedingung höchstens $k \leqslant n(v_0) - 1$ Nullstellen im Intervall $[a, b]$, in denen die Differenz $v - v_0$ ihr Vorzeichen wechselt. Da $\mathfrak{L}_{v_0}$ der Haarschen Bedingung genügt, gibt es eine Funktion h in $\mathfrak{L}_{v_0}$, die genau in diesen Punkten das Vorzeichen wechselt (vgl. Werner [30]). Dann hat die Funktion h oder $-h$ die verlangten Eigenschaften.

Nach Satz 6 und nach Karlin und Studden [21] sind die folgenden im allgemeinen nichtlinearen Mengen Kolmogoroff-Mengen 2. Art.

$$v(x, a) := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{\gamma_\nu \cdot x} \qquad a_{\nu,\lambda_\nu} \in \mathbb{R}, \tag{a}$$

$$v(x, a) := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{(x-t_\nu)^2}, \qquad a_\nu, t_\nu \in \mathbb{R}, \tag{b}$$

$$v(x, a) := \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{x + t_\nu}, \qquad a_\nu, t_\nu \in \mathbb{R},\ t_\nu > 0,\ x > 0. \tag{c}$$

4. Reguläre Mengen in normierten Vektorräumen

Wir bezeichnen mit S_R die Einheitskugel eines normierten Vektorraumes, also die Menge

$$S_R := \{f \in R : \|f\| \leqslant 1\},$$

und mit $\operatorname{Ep} A$ die Menge der Extremalpunkte einer Teilmenge A eines linearen Raumes. Die durch die $\sigma(R^*, R)$-Topologie in $\operatorname{Ep} S_{R^*}$ induzierte Topologie bezeichnen wir mit $\sigma_{\mathrm{Ep}}(R^*, R)$- oder auch kurz mit σ_{Ep}-Topologie.

Grundlegend für die weiteren Untersuchungen ist die folgende

Definition 1. (1) Eine nichtleere Teilmenge V von R heißt regulär im Punkte v_0 aus V, wenn für jedes Element f aus $R \backslash V$, für jedes Element v aus V, für jede reelle Zahl $\lambda > 0$ und für jede $\mathscr{E}_{f-v_0}$ enthaltende σ_{Ep}-abgeschlossene Teilmenge $A \subset \operatorname{Ep} S_{R^*}$ mit $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$ für L aus A ein Element v_λ aus V existiert mit

(R1) $\operatorname{Re} L(v_\lambda - v_0) > \operatorname{Re} L(f - v_0) - \| f - v_0 \|$ für L aus A;

(R2) $\| v_\lambda - v_0 \| < \lambda$.

(2) Eine Teilmenge V von R heißt regulär, wenn V in jedem Punkt aus V regulär ist.

Wir beweisen zunächst das folgende

LEMMA 1 (*Variationslemma*). *Es sei V eine Teilmenge eines normierten Vektorraumes R, die in v_0 aus V regulär ist. Ferner sei ein Element f aus R gegeben. Gibt es ein Element v aus V mit* $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$ *für L aus $\mathscr{E}_{f-v_0}$, so enthält für jede positive reelle Zahl λ die Menge*

$$U(\lambda; v_0) := \{v \in V : \| v - v_0 \| < \lambda\}$$

ein Element v_λ mit

$$\| f - v_\lambda \| < \| f - v_0 \| .$$

Beweis. Es genügt die Behauptung für alle hinreichend kleinen positiven λ zu beweisen. Sei

$$a := \min_{L \in \Sigma_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v - v_0).$$

Die Menge

$$N := \{L \in \Sigma_{f-v_0} : \operatorname{Re} L(v - v_0) = a\}$$

ist konvex und $\sigma(R^*, R)$-kompakt, besitzt also nach dem Satz von Krein-Milman mindestens einen Extremalpunkt. Dieser ist dann auch Extremalpunkt von Σ_{f-v_0}, liegt also in $\mathscr{E}_{f-v_0}$. Mithin ist

$$a = \min_{L \in \mathscr{E}_{f-v_0}} L(v - v_0) > 0.$$

Die Menge

$$U := \left\{ L \in \operatorname{Ep} S_{R^*} : \operatorname{Re} L(v - v_0) > \frac{a}{2} \right\}$$

ist eine σ_{Ep}-offene Teilmenge von $\operatorname{Ep} S_{R^*}$ und enthält $\mathscr{E}_{f-v_0}$. Es gilt die Ungleichung

$$E^* := \sup_{L \in \operatorname{Ep} S_{R^*} \setminus U} \operatorname{Re} L(f - v_0) < \| f - v_0 \|.$$

Wir beweisen diese Ungleichung indirekt und nehmen $E^* = \| f - v_0 \|$ an. Dann gibt es Funktionale $L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots$ aus $\operatorname{Ep} S_{R^*} \setminus U$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{Re} L_k(f - v_0) = \| f - v_0 \|.$$

Da S_{R^*} eine $\sigma(R^*, R)$-kompakte Menge ist, hat die Folge $L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots$ einen $\sigma(R^*, R)$-Häufungspunkt L_0 in S_{R^*} für den

$$\operatorname{Re} L_0(f - v_0) = \| f - v_0 \|$$

und somit

$$L_0(f - v_0) = \| f - v_0 \|$$

gilt. Folglich ist L_0 aus Σ_{f-v_0} und somit $\operatorname{Re} L_0(v - v_0) \geqslant a$. Da andererseits $\operatorname{Re} L_k(v - v_0) \leqslant a/2$ für $k = 1, 2, \ldots$, gilt, erhalten wir einen Widerspruch.

Für jedes Funktional L aus der σ_{Ep}-abgeschlossenen Menge

$$\overline{U} := \left\{ L \in \operatorname{Ep} S_{R^*} : \operatorname{Re} L(v - v_0) \geqslant \frac{a}{2} \right\}$$

gilt die Abschätzung $\operatorname{Re} L(v - v_0) \geqslant a/2$. Da V im Punkte v_0 regulär ist, gibt es zu jeder positiven reellen Zahl λ ein Element v_λ aus V, das den Bedingungen

$$\operatorname{Re} L(v_\lambda - v_0) > \operatorname{Re} L(f - v_0) - \| f - v_0 \| \tag{3}$$

für L aus $\overline{U}$ und

$$\| v_\lambda - v_0 \| < \lambda$$

genügt. Es sei nun λ so gewählt, daß

$$0 < \lambda < \| f - v_0 \| - E^*$$

gilt. Für jedes Funktional L aus U gilt wegen der Ungleichung (3) die Abschätzung

$$\operatorname{Re} L(f - v_\lambda) = \operatorname{Re} L(f - v_0) - \operatorname{Re} L(v_\lambda - v_0) < \| f - v_0 \| .$$

Für jedes Funktional L aus $\operatorname{Ep} S_{R^*} \backslash U$ gilt wegen $0 < \lambda < \| f - v_0 \| - E^*$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} L(f - v_\lambda) &= \operatorname{Re} L(f - v_0) - \operatorname{Re} L(v_\lambda - v_0) \\ &\leqslant E^* + \| v_\lambda - v_0 \| \leqslant E^* + \lambda < \| f - v_0 \| . \end{aligned}$$

Folglich gilt für alle λ mit $0 < \lambda < \| f - v_0 \| - E^*$ die Ungleichung

$$\operatorname{Re} L(f - v_\lambda) < \| f - v_0 \|$$

für L aus Ep S_{R^*}. Mit Hilfe des Satzes von Krein–Milman beweist man dann auch

$$\operatorname{Re} L(f - v_\lambda) < \| f - v_0 \|$$

für alle L aus S_{R^*}. Da S_{R^*} eine $\sigma(R^*, R)$-kompakte Menge ist folgt

$$\| f - v_\lambda \| < \| f - v_0 \| .$$

Aus dem Variationslemma ergibt sich die

Folgerung. Jedes lokale Minimum des Funktionals $\Phi(v) := \| f - v \|$ auf einer Kolmogoroff-Menge 1. Art ist ein globales Minimum.

Ein Element v_0 aus einer nichtleeren Teilmenge V eines normierten Vektorraumes R heißt ein solarer Punkt von V, wenn für jedes Element f aus R gilt: Ist v_0 eine beste Approximation für f bezüglich V, so ist v_0 auch eine beste Approximation für $v_0 + \lambda \cdot (f - v_0)$ für jede nichtnegative reelle Zahl λ. Nach Brosowski [10] gilt das folgende

LEMMA 2. *Ein Element v_0 aus V ist genau dann ein solarer Punkt von V, wenn für alle f aus R gilt: Ist v_0 eine beste Approximation für f bezüglich V, so genügt jedes Element v aus V der Ungleichung*

$$\min_{L \in \mathscr{E}_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v - v_0) \leqslant 0.$$

Wir beweisen nun den

SATZ 8. *Eine Teilmenge V eines normierten Vektorraumes R ist genau dann im Punkte v_0 aus V regulär, wenn v_0 ein solarer Punkt von V ist.*

Beweis. (a) Sei V in v_0 regulär. Nach Lemma 2 haben wir zu zeigen: Ist v_0 eine Minimallösung für f bezüglich V, so gilt

$$\min_{L \in \mathscr{E}_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v - v_0) \leqslant 0$$

für alle v aus V. Gibt es ein Element v aus V mit $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$ für alle L aus $\mathscr{E}_{f-v_0}$, so gibt es nach Lemma 1 ein Element v_λ aus V mit

$$\| f - v_\lambda \| < \| f - v_0 \| .$$

(b) Sei v_0 ein solarer Punkt von V. Gegeben sei ein Element f aus $R \backslash V$, ein Element v aus V, eine positive reelle Zahl λ und eine $\mathscr{E}_{f-v_0}$ enthaltende σ_{Ep}-abgeschlossene Teilmenge A von Ep S_{R^*}, so daß

$$\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0 \tag{4}$$

für alle L aus A gilt. Wir haben zu zeigen, daß es ein v_λ aus V mit den Eigenschaften (R1) und (R2) gibt. Da A die Menge $\mathscr{E}_{f-v_0}$ enthält, ist wegen (4) v_0 keine Minimallösung für f bezüglich V. Da v_0 ein solarer Punkt von V ist, ist v_0 auch keine Minimallösung für

$$f_\mu := v_0 + \mu \cdot (f - v_0)$$

bezüglich V für alle $\mu > 0$. Es gibt daher ein w_μ aus V mit

$$\|f_\mu - w_\mu\| < \|f_\mu - v_0\| = \mu \cdot \|f - v_0\|.$$

Sei nun

$$0 < \mu < \min\left(1, \frac{\lambda}{2 \cdot \|f - v_0\|}\right).$$

Dann ist

$$\|w_\mu - v_0\| \leqslant \|f_\mu - w_\mu\| + \|f_\mu - v_0\| < 2\mu \cdot \|f - v_0\| < \lambda \tag{5}$$

und

$$\|f - w_\mu\| \leqslant \|f - f_\mu\| + \|f_\mu - w_\mu\| < \|f - v_0\|. \tag{6}$$

Wegen (5) erfüllt $v_\lambda := w_\mu$ die Bedingung (R2) und wegen (6) gilt

$$\operatorname{Re} L(f - v_0) - \operatorname{Re} L(w_\mu - v_0) = \operatorname{Re} L(f - w_\mu) < \|f - v_0\|$$

für alle L mit $\|L\| \leqslant 1$. Daraus folgt speziell für L aus A (da für diese L stets $\|L\| \leqslant 1$ gilt) die Ungleichung

$$\operatorname{Re} L(w_\mu - v_0) > \operatorname{Re} L(f - v_0) - \|f - v_0\|.$$

Aus dem vorstehenden Satz folgt der

SATZ 9. *Es sei V eine nichtleere Teilmenge eines normierten Vektorraumes R. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(A) *V ist eine α-Sonne.*

(B) *V ist eine Kolmogoroff-Menge* 1. *Art.*

(C) *V ist regulär.*

Wir geben das Beispiel

BEISPIEL 4. Es sei V eine Teilmenge von R, die sternförmig bezüglich v_0 aus V ist. Dann ist V regulär in v_0.

Zum Nachweis sei ein Element $v \neq v_0$ aus V und eine beliebige Teilmenge

A von Ep S_{R^*} mit Re $L(v - v_0) > 0$ für L aus A gegeben. Für $\lambda > 0$ setzen wir

$$v_\lambda := \left(1 - \frac{\mu}{\| v - v_0 \|}\right) v_0 + \frac{\mu}{\| v - v_0 \|} \cdot v$$

mit $0 < \mu < \min(\|v - v_0\|, \lambda)$. Das Element v_λ ist aus V. Wir erhalten

$$\operatorname{Re} L(v_\lambda - v_0) = \frac{\mu}{\| v - v_0 \|} \cdot \operatorname{Re} L(v - v_0) > 0 \geqslant \operatorname{Re} L(f - v_0) - \| f - v_0 \|$$

und

$$\| v_\lambda - v_0 \| = \frac{\mu}{\| v - v_0 \|} \cdot \| v - v_0 \| < \lambda.$$

Aus diesem Beispiel ergibt sich der

SATZ 10. *Jeder lineare Teilraum und jede konvexe Menge eines normierten Vektorraumes R ist regulär.*

5. CHARAKTERISIERUNG DER REGULÄREN MENGEN IM RAUME $C[Q, H]$

Die Approximation im Raume $C[Q, H]$ ist von Brosowski [9, 12] ausführlich studiert worden. Von ihm werden gewisse Teilmengen von $C[Q, H]$ regulär genannt gemäß der folgenden Definition (Zur Unterscheidung nennen wir die von Brosowski im Raume $C[Q, H]$ eingeführten regulären Mengen C-regulär und die oben eingeführten regulären Teilmengen in normierten Vektorräumen R-regulär).

DEFINITION 2. (1) Eine nichtleere Teilmenge V von $C[Q, H]$ heißt C-regulär im Punkte v_0 aus V, wenn für jedes f aus $C[Q, H]$ für jedes v aus V mit

$$\operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v(x) - v_0(x)) > 0$$

für x aus M_{f-v_0} und für jede positive reelle Zahl λ ein Element v_λ aus V existiert mit den folgenden Eigenschaften

(R1) $2 \operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v_\lambda(x) - v_0(x)) > \| v_\lambda(x) - v_0(x)\|_H^2$ für x aus M_{f-v_0};

(R2) $\| v_\lambda - v_0 \| < \lambda$.

(2) Eine nichtleere Teilmenge V von $C[Q, H]$ heißt C-regulär, wenn sie in jedem ihrer Punkte C-regulär ist.

Da $C[Q, H]$ ein spezieller normierter Vektorraum ist, kann man auf Teilmengen V von $C[Q, H]$ auch den Begriff R-regulär anwenden. Sowohl für R-reguläre Mengen als auch für C-reguläre Mengen gilt:

Eine Menge V ist genau dann regulär, wenn eine Minimallösung v_0 für f bezüglich V stets dem globalen Kolmogoroffschen Kriterium genügt. Damit ist klar, daß für Mengen aus $C[Q, H]$ die beiden Regularitätsbegriffe äquivalent sind. Im folgenden Satz zeigen wir nun die Äquivalenz der beiden Regularitätsbegriffe direkt.

SATZ 11. *Jede R-reguläre Teilmenge von $C[Q, H]$ ist C-regulär und umgekehrt.*

Beweis. (a) Es sei V aus $C[Q, H]$ R-regulär in v_0 aus V. Gegeben sei ein f aus $C[Q, H]$, ein v aus V mit

$$\mathrm{Re}(f(x) - v_0(x), v(x) - v_0(x)) > 0$$

für x aus M_{f-v_0} und eine positive reelle Zahl λ. Dann ist $\mathrm{Re}\, L_x(v - v_0) > 0$ für alle Funktionale L_x aus $C[Q, H]$ von der Gestalt

$$L_x(g) := \left(\frac{f(x) - v_0(x)}{\|f(x) - v_0(x)\|_H}, g(x)\right)$$

mit x aus M_{f-v_0}. Diese Funktionale bilden gerade die Menge $\mathscr{E}_{f-v_0}$. Es ist also $\mathrm{Re}\, L(v - v_0) > 0$ für alle L aus $\mathscr{E}_{f-v_0}$. Da für die Approximation bezüglich R-regulärer Mengen das globale Kolmogoroff-Kriterium notwendig ist, kann v_0 keine Minimallösung für f bezüglich V sein. Da ferner wegen der R-Regularität jedes lokale Minimum des Funktionals $\Phi(v) := \|f - v\|$ auf V ein globales Minimum ist, ist v_0 auch keine Minimallösung für f bezüglich

$$V_\lambda := \{v \in V : \|v - v_0\| < \lambda\}.$$

Es gibt also ein v_λ aus V mit $\|f - v_\lambda\| < \|f - v_0\|$. Für alle x aus M_{f-v_0} gilt dann

$$\|f(x) - v_\lambda(x)\|_H < \|f(x) - v_0(x)\|_H = \|f - v_0\|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
0 &< \|f(x) - v_0(x)\|_H^2 - \|f(x) - v_\lambda(x)\|_H^2 \\
&= (f(x) - v_0(x), f(x) - v_0(x)) - (f(x) - v_\lambda(x), f(x) - v_\lambda(x)) \\
&= 2\,\mathrm{Re}(f(x) - v_0(x), v_\lambda(x) - v_0(x)) - \|v_\lambda(x) - v_0(x)\|_H^2
\end{aligned}$$

für alle x aus M_{f-v_0}. Da wegen v_λ aus V_λ auch $\| v_\lambda - v_0 \| < \lambda$ gilt, sind damit die Bedingungen (R1) und (R2) der C-Regularität im Punkte v_0 gezeigt. Da v_0 beliebig in V gewählt war, ist V also C-regulär.

(b) Sei nun V in v_0 C-regulär. Gegeben sei ein Element f aus $C[Q, H]$, ein Element v aus V und eine $\mathscr{E}_{f-v_0}$ enthaltende σ_{Ep}-abgeschlossene Menge A mit

$$\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$$

für L aus A und eine positive reelle Zahl λ. Wir haben zu zeigen, daß ein Element v_λ in V existiert, das den Bedingungen (R1) und (R2) der R-Regularität genügt.

Die Funktionale aus $\mathscr{E}_{f-v_0}$ haben die Gestalt

$$L_x(g) = \left(\frac{f(x) - v_0(x)}{\| f(x) - v_0(x) \|_H}, g(x)\right)$$

mit x aus M_{f-v_0}. Aus $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$ für L aus A folgt dann

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(x) - v_0(x)}{\| f(x) - v_0(x) \|_H}, v(x) - v_0(x)\right) > 0$$

für alle x aus M_{f-v_0}, was gleichbedeutend ist mit

$$\operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v(x) - v_0(x)) > 0$$

für alle x aus M_{f-v_0}. (Für das weitere benutzen wir eine Beweisidee von Brosowski [12].)

Wegen der Kompaktheit der Menge M_{f-v_0} gibt es eine reelle Zahl a in der Art, daß für jeden Punkt x aus M_{f-v_0} die Ungleichung

$$\operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v(x) - v_0(x)) \geqslant a > 0$$

gilt. Die Menge

$$U := \left\{x \in Q : \operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v(x) - v_0(x)) > \frac{a}{2}\right\}$$

ist wegen der Stetigkeit der Abbildungen $f - v_0$ und $v - v_0$ offen und enthält die Menge M_{f-v_0}. Für jeden Punkt x aus $Q \backslash U$ gilt die Abschätzung

$$\| f(x) - v_0(x) \|_H < \| f - v_0 \| .$$

Da $Q \backslash U$ abgeschlossen und folglich kompakt ist, folgt

$$E^* := \max_{x \in Q \backslash U} \| f(x) - v_0(x) \|_H < \| f - v_0 \|.$$

Für jeden Punkt x aus $\overline{U}$ gilt die Abschätzung

$$\operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v(x) - v_0(x)) \geqslant \frac{a}{2} > 0.$$

Es gibt daher eine reelle Zahl c in der Art, daß

$$\| f(x) - v_0(x)\|_H \geqslant c > 0$$

für alle x aus $\overline{U}$ gilt. Für jedes x aus Q setzen wir

$$g(x) := \begin{cases} c \cdot \dfrac{f(x) - v_0(x)}{\| f(x) - v_0(x)\|_H} & \text{für} \quad x \in \{x \in Q : \| f(x) - v_0(x)\|_H \geqslant c\} \\ f(x) - v_0(x) & \text{für} \quad x \in \{x \in Q : \| f(x) - v_0(x)\|_H \leqslant c\}. \end{cases}$$

Damit ist g eine stetige Abbildung von Q in H. Nach dem Lemma von Urysohn gibt es eine auf Q stetige reelle Funktion m mit den Eigenschaften

$$m(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in \{x \in Q : \operatorname{Re}(g(x), v(x) - v_0(x)) \leqslant 0\} \\ 1 & \text{für} \quad x \in \overline{U} \end{cases}$$

und $0 \leqslant m(x) \leqslant 1$ für jedes x aus Q. Nun setzen wir $h := m \cdot g$. Dann gilt für jeden Punkt x aus M_h die Abschätzung

$$\operatorname{Re}(h(x), v(x) - v_0(x)) > 0.$$

Ist nämlich x aus M_h, so ist

$$m(x) \cdot \| g(x)\|_H = \| h(x)\|_H = \| h \| > 0$$

und somit $m(x) > 0$ und $\operatorname{Re}(g(x), v(x) - v_0(x)) > 0$. Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt die behauptete Ungleichung.

Wegen der vorausgesetzten C-Regularität gibt es zu dem Element v aus V, zu dem Element h aus $C[Q, H]$ und zu jeder reellen Zahl $\mu > 0$ ein Element v_μ, das den Bedingungen

$$2 \operatorname{Re}(h(x), v_\mu(x) - v_0(x)) > \| v_\mu(x) - v_0(x)\|_H^2$$

für x aus M_h und

$$\| v_\mu - v_0 \| < \mu \tag{7}$$

genügt. Wegen $M_h \supset \overline{U}$ und $\| f(x) - v_0(x)\|_H \geqslant c$ für x aus $\overline{U}$ folgt weiter

$$2 \operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v_\mu(x) - v_0(x)) > \| v_\mu(x) - v_0(x)\|_H^2$$

für x aus $\overline{U}$.

Es sei nun μ eine reelle Zahl, die der Bedingung $0 < \mu < \| f - v_0 \| - E^*$ genügt. Dann gilt für jeden Punkt x aus U die Beziehung

$$\begin{aligned} &\| f(x) - v_\mu(x)\|_H^2 \\ &\quad = \| f(x) - v_0(x) - (v_\mu(x) - v_0(x))\|_H^2 \\ &\quad \leqslant \| f - v_0 \|^2 - 2\operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v_\mu(x) - v_0(x)) + \| v_\mu(x) - v_0(x)\|_H^2, \end{aligned}$$

aus der mit der oben bewiesenen Ungleichung

$$2\operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v_\mu(x) - v_0(x)) > \| v_\mu(x) - v_0(x)\|_H^2$$

die Abschätzung

$$\| f(x) - v_\mu(x)\|_H^2 < \| f - v_0 \|^2$$

folgt. Für jeden Punkt x aus $Q \backslash U$ gilt wegen $0 < \lambda < \| f - v_0 \| - E^*$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \| f(x) - v_\mu(x)\|_H &= \| f(x) - v_0(x) - (v_\mu(x) - v_0(x))\|_H \\ &\leqslant \| f(x) - v_0(x)\| + \| v_\mu(x) - v_0(x)\|_H \\ &< E^* + \| f - v_0 \| - E^* = \| f - v_0 \|. \end{aligned}$$

Folglich gilt für alle μ mit $0 < \mu < \| f - v_0 \| - E^*$ die Ungleichung

$$\| f - v_\mu \| < \| f - v_0 \|,$$

die gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$\operatorname{Re} L(f - v_\mu) < \| f - v_0 \|$$

für alle L aus $C[Q, H]^*$ mit $\| L \| = 1$ ist und somit auch für alle L aus A gültig ist.

Wählen wir μ mit $0 < \mu < \lambda$, so genügt dieses v_μ wegen der vorstehenden Betrachtung der Bedingung (R1) und wegen der Ungleichung (7) der Bedingung (R2) der R-Regularität. Folglich ist V R-regulär im Punkte v_0. Da v_0 beliebig in V gewählt war, ist V daher R-regulär.

6. Beweis des Durchschnittssatzes für Kolmogoroff-Mengen 1. Art

Wir verallgemeinern den von Rivlin und Shapiro [26] eingeführten Begriff der Extremalsignatur auf normierte Vektorräume.

DEFINITION 3. (1) Eine nichtleere σ_{Ep}-abgeschlossene Teilmenge A von $\mathrm{Ep}\, S_{R^*}$ heißt eine Signatur, wenn es ein vom Nullelement verschiedenes Element f aus R gibt mit $\mathscr{E}_f \supset A$.

(2) Eine Teilmenge $A \subset R^*$ heißt extremal für das Element v_0 aus V bezüglich einer Teilmenge V von R, wenn jedes Element v aus V der Ungleichung

$$\min_{L \in A} \operatorname{Re} L(v - v_0) \leqslant 0$$

genügt.

Mit Hilfe dieser Definition läßt sich das globale Kolmogoroff-Kriterium folgendermaßen formulieren:

Wenn die Signatur $\mathscr{E}_{f-v_0}$ extremal ist für v_0 bezüglich V, dann ist v_0 Minimallösung für f bezüglich V.

Wir beweisen nun den

SATZ 12. *Gegeben sei eine Kolmogoroff-Menge* 1. *Art V eines normierten Vektorraumes R, ein Element f aus R und eine Teilmenge T von V. Dann gilt: Die Teilmenge T von V ist genau dann eine Menge von Minimallösungen für das Element f aus R, wenn der Durchschnitt*

$$\Delta := \bigcap_{v \in T} \mathscr{E}_{f-v}$$

extremal für alle v aus T ist.

Beweis. Hinlänglichkeit. Sei v_0 beliebig aus T. Da Δ extremal für v_0 ist, ist auch $\mathscr{E}_{f-v_0}$ extremal für v_0. Folglich ist v_0 eine Minimallösung für f bezüglich V.

Notwendigkeit. Wir beweisen die Notwendigkeit in mehreren Schritten.

Zunächst zeigen wir durch vollständige Induktion nach n die folgende Aussage:

(1) *Für alle f aus R gilt: Sind $v_1, \dots, v_n$ Minimallösungen für f bezüglich V, dann gibt es zu jedem v aus V ein L aus*

$$\Gamma := \bigcap_{\nu=1}^{n} \Sigma_{f-v_\nu}$$

mit

$$\operatorname{Re} L(v - v_\nu) \leqslant 0$$

für alle $\nu = 1, \dots, n$.

Aus (1) folgt dann unmittelbar, daß Γ extremal ist für jedes der Elemente $v_1, \dots, v_n$ bezüglich V.

Da V eine Kolmogoroff-Menge 1. Art ist, ist für jedes Element f aus R und für jede Minimallösung v für f die Menge Σ_{f-v} extremal für v bezüglich V. Die Behauptung (1) gilt also für $n = 1$.

Nun zeigen wir, daß die Behauptung (1) für $n + 1$ gilt, wenn sie für n gültig ist. Es seien

$$v_1, v_2, \ldots, v_{n+1} \in V$$

Minimallösungen für f bezüglich V und v ein beliebiges Element aus V. Wir haben dann zu zeigen, daß es ein Funktional L aus R gibt mit den folgenden Eigenschaften:

$$\| L \| = 1; \tag{8}$$

$$L(f - v_\nu) = E(f; V), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n + 1; \tag{9}$$

$$\operatorname{Re} L(v - v_\nu) \leqslant 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n + 1, \tag{10}$$

wobei wir

$$E(f; V) := \inf_{v \in V} \| f - v \|$$

gesetzt haben. Es sei bemerkt, daß es im Falle der Ungleichungen (10) genügt nur die Ungleichung für $\nu = 1$ zu beweisen. Die übrigen Ungleichungen folgen mit Hilfe von (9) aus der für $\nu = 1$.

Nun definieren wir für jede nichtnegative reelle Zahl λ das Element

$$f_\lambda := f + \lambda \cdot (f - v_{n+1})$$

und die Menge

$$S_\lambda := \{ g \in R : \| f_\lambda - g \| < (1 + \lambda) \cdot E(f; V) \}.$$

Nun gilt für alle g aus S_0 die Ungleichung

$$\begin{aligned} \| f_\lambda - g \| &\leqslant \| f_\lambda - f \| + \| f - g \| < \lambda \cdot \| f - v_{n+1} \| + E(f; V) \\ &= (1 + \lambda) \cdot E(f; V). \end{aligned}$$

Folglich gilt die Inklusion $S_0 \subset S_\lambda$ für alle $\lambda \geqslant 0$.

Da eine Kolmogoroffsche Menge 1. Art nach Satz 1 eine α-Sonne ist, ist v_{n+1} auch eine Minimallösung für f_λ bezüglich V, wobei

$$\| f_\lambda - v_{n+1} \| = (1 + \lambda) \cdot \| f - v_{n+1} \| = (1 + \lambda) \cdot E(f; V)$$

gilt. Nun gilt für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|f_\lambda - v_\nu\| &\leqslant \|f_\lambda - f\| + \|f - v_\nu\| = \lambda \cdot \|f - v_{n+1}\| + E(f; V) \\ &= (1 + \lambda) \cdot E(f; V).\end{aligned}$$

Folglich sind auch $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Minimallösungen für f_λ bezüglich V. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für die Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und für das Element f_λ zu dem Element v aus V ein Funktional L aus R mit den folgenden Eigenschaften:

$$\|L\| = 1; \tag{8*}$$

$$L(f_\lambda - v_\nu) = (1 + \lambda) \cdot E(f; V), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n; \tag{9*}$$

$$\operatorname{Re} L(v - v_\nu) \leqslant 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{10*}$$

Wir zeigen nun, daß für $\lambda > 0$ dieses Funktional L den Bedingungen (8), (9) und (10) genügt. Dazu haben wir gemäß der Bemerkung nach den Ungleichungen (10) nur noch zu zeigen, daß

$$L(f - v_\nu) = E(f; V)$$

für $\nu = n + 1$ gilt. Die Hyperebene

$$H := \{g \in R : \operatorname{Re} L(g) = \operatorname{Re} L(v_1)\}$$

ist eine Stützhyperebene an die Menge S_λ mit dem Stützpunkt v_1. Es gilt nämlich für jedes g aus S_λ wegen

$$\operatorname{Re} L(f - g) \leqslant \|f_\lambda - g\| < (1 + \lambda) \cdot E(f; V) = \operatorname{Re} L(f_\lambda - v_1)$$

die Ungleichung

$$\operatorname{Re} L(g) > \operatorname{Re} L(v_1).$$

Ferner ist v_1 aus $\partial S_\lambda \cap H$. Wegen $S_0 \subset S_\lambda$ und v_1 aus ∂S_0 ist H auch eine Stützhyperebene an S_0 mit dem Stützpunkt v_1. Folglich gilt $L(f - v_1) = \|f - v_1\| = E(f; V)$. Wegen Bedingung (9*) folgt dann

$$L(f - v_\nu) = E(f; V)$$

auch für $\nu = 2, 3, \ldots, n$. Wäre nun $L(f - v_{n+1}) \neq E(f; V)$, so folgt

$$\operatorname{Re} L(f_\lambda - v_{n+1}) < (1 + \lambda) \cdot E(f; V)$$

und somit auch

$$\operatorname{Re} L(f - v_{n+1}) < E(f; V)$$

und

$$\operatorname{Re} L(f_\lambda - f) < \lambda \cdot E(f; V).$$

Damit ist

$$\begin{aligned}(1 + \lambda) \cdot E(f; V) &= L(f_\lambda - v_1) \\ &= \operatorname{Re} L(f_\lambda - f) + \operatorname{Re} L(f - v_1) < \lambda \cdot \| f - v_1 \| \\ &\quad + \| f - v_1 \| = (1 + \lambda) \cdot E(f; V).\end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt uns, daß auch

$$L(f - v_{n+1}) = E(f; V)$$

ist. Damit ist die Behauptung (1) bewiesen.

(2) *Für alle f aus R gilt: Ist $T \subset V$ eine Menge von Minimallösungen für f bezüglich V, so ist*

$$\Gamma := \bigcap_{v \in T} \Sigma_{f-v}$$

extremal für jedes Element v aus T.

Wir beweisen indirekt und nehmen an, es gebe ein v_0 aus T und ein $\hat{v}$ aus V mit

$$\operatorname{Re} L(\hat{v} - v_0) > 0$$

für alle L aus Γ. Dann gilt

$$\Gamma \cap \{L \in S_{R^*} : \operatorname{Re} L(\hat{v} - v_0) \leqslant 0\} = \varnothing.$$

Wegen der $\sigma(R^*, R)$-Kompaktheit der Menge

$$\Sigma_{f-v_0} \cap \{L \in S_{R^*} : \operatorname{Re} L(\hat{v} - v_0) \leqslant 0\}$$

gibt es dann endlich viele Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aus T, so daß

$$\bigcap_{\nu=0}^{n} (\Sigma_{f-v_\nu} \cap \{L \in S_{R^*} : \operatorname{Re} L(\hat{v} - v_0) \leqslant 0\}) = \varnothing$$

gilt, was jedoch wegen (1) nicht möglich ist.

(3) *Beweis von Satz* 12. Nach dem unter (2) Bewiesenen ist Γ extremal für jedes Element aus T. Daher ist nach [10], Lemma 2, wegen

$$\begin{aligned} \operatorname{Ep}\Big(\bigcap_{v\in T} \Sigma_{f-v}\Big) &= \operatorname{Ep}(S_{R^*}) \cap \bigcap_{v\in T} \Sigma_{f-v} \\ &= \bigcap_{v\in T} (\operatorname{Ep}(S_{R^*}) \cap \Sigma_{f-v}) \\ &= \bigcap_{v\in T} \mathscr{E}_{f-v} \end{aligned}$$

auch Δ extremal für alle v aus T.

7. Einige Folgerungen aus dem Durchschnittssatz

Wir bezeichnen mit con A die konvexe Hülle einer Teilmenge A eines linearen Raumes und setzen für jedes Element f eines normierten Vektorraumes R und für jede reelle Zahl $\alpha \geqslant 0$

$$K[f;\alpha] := \{g \in R : \|f-g\| \leqslant \alpha\}.$$

Ferner setzen wir

$$P_V(f) := \{v \in V : \|f-v\| = E(f;V)\}.$$

Wir beweisen den

Satz 13. *Es sei V eine Kolmogoroff-Menge* 1. *Art im normierten Vektorraum R. Dann gilt für alle f aus R die Inklusion*

$$\operatorname{con} P_V(f) \subset \partial K[f; E(f;V)].$$

Beweis. Gegeben seien die Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_k$ aus $P_V(f)$. Dann gilt für alle nichtnegativen reellen Zahlen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ mit $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_k = 1$ die Abschätzung

$$\Big\|f - \sum_{\varkappa=1}^{k} \rho_\varkappa v_\varkappa\Big\| \leqslant \sum_{\varkappa=1}^{k} \rho_\varkappa \|f - v_\varkappa\| = E(f;V). \tag{11}$$

Nach dem Durchschnittssatz gibt es ein Funktional

$$L \in \bigcap_{\varkappa=1}^{k} \mathscr{E}_{f-v_\varkappa}$$

mit $L(f - v_\varkappa) = E(f;V)$ für $\kappa = 1, 2, \ldots, k$. Dann gilt für alle nichtnegativen reellen Zahlen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ mit $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_k = 1$ die Gleichung

$$L\Big(f - \sum_{\varkappa=1}^{k} \rho_\varkappa v_\varkappa\Big) = \sum_{\varkappa=1}^{k} L(f - v_\varkappa) = E(f;V),$$

aus der die Abschätzung

$$\left\| f - \sum_{x=1}^{k} \rho_x v_x \right\| \geqslant E(f; V)$$

folgt. Zusammen mit der Abschätzung (11) gilt also

$$\left\| f - \sum_{x=1}^{k} \rho_x v_x \right\| = E(f; V).$$

Folglich gilt con $P_V(f) \subset \partial K[f; E(f; V)]$.

Mit Hilfe von Satz 13 verallgemeinern wir nun ein Ergebnis von I. Singer [27] aus der Theorie der linearen Approximation auf die Approximation durch Elemente aus Kolmogoroff-Mengen 1. Art. Zunächst einige Vorbereitungen:

Wir bezeichnen mit $\mathrm{l}(A)$ die lineare Mannigfaltigkeit, die von einer Teilmenge A eines normierten Vektorraumes R aufgespannt wird, d.h. die Menge

$$\mathrm{l}(A) := \{\lambda x + (1 - \lambda) y \in R : y, x \in \operatorname{con} A \text{ und } -\infty < \lambda < +\infty\}.$$

Für $0 \leqslant \dim \mathrm{l}(A) < \infty$ erklären wir die Dimension einer Menge A aus R durch

$$\dim A := \dim \mathrm{l}(A).$$

Nach Singer [27] definieren wir:

DEFINITION 4. Ein normierter Vektorraum R ist genau dann k-strikt konvex, wenn für je $k + 1$ Elemente $x_0, x_1, \ldots, x_k$ aus R die Gleichung

$$\| x_0 + x_1 + \cdots + x_k \| = \| x_0 \| + \| x_1 \| + \cdots + \| x_k \|$$

die lineare Abhängigkeit der Elemente $x_0, x_1, \ldots, x_k$ impliziert.

Im Falle $k = 1$ fällt die k-strikte Konvexität mit der üblichen strikten Konvexität eines normierten Vektorraumes zusammen. Wir benötigen das folgende

LEMMA 3 (I. Singer [27]). *Ein normierter Vektorraum R ist genau dann k-strikt konvex, wenn jede konvexe Teilmenge der Sphäre*

$$\{x \in R : \| x \| = 1\}$$

höchstens die Dimension $k - 1$ hat.

Nun ergeben sich aus Satz 13 mit Hilfe des Singerschen Lemma die beiden Folgerungen.

Folgerung 1. In einem k-strikt konvexen Raum ist für jede Kolmogoroff-Menge 1. Art die Menge der Minimallösungen höchstens $(k-1)$-dimensional.

Folgerung 2. In einem strikt konvexen Raum ist jede Kolmogoroff-Menge 1. Art eine Tschebyscheff-Menge.

Dabei heißt eine Teilmenge V von R genau dann eine Tschebyscheff-Menge, wenn es zu jedem f aus R höchstens eine Minimallösung für f bezüglich V gibt.

Folgerung 1 enthält als Spezialfall den von Singer [27] behandelten Fall linearer Räume.

Mit Hilfe des Durchschnittssatzes beweisen wir nun für Kolmogoroff-Mengen 1. Art ein hinreichendes Eindeutigkeitskriterium, das wir in der folgenden Form aufschreiben:

SATZ 14. *Es sei V eine Kolmogoroff-Menge* 1. *Art in einem normierten Vektorraum R.*

Ist V keine Tschebyscheff-Menge, so gibt es Elemente v, v_0 aus V und eine Extremalsignatur E für v_0 bezüglich V mit $L(v - v_0) = 0$ für alle L aus E.

Beweis. Ist V keine Tschebyscheff-Menge, so gibt es ein f aus R mit mindestens zwei Minimallösungen v_0 und v bezüglich V. Dann ist nach dem Durchschnittssatz die Signatur $\mathscr{E}_{f-v_0} \cap \mathscr{E}_{f-v}$ extremal für v_0 bezüglich V und es gilt $L(v - v_0) = 0$ für alle L aus $\mathscr{E}_{f-v_0} \cap \mathscr{E}_{f-v}$.

Mit Hilfe von Satz 14 und der Darstellung der Extremalfunktionale der Einheitskugel im Dualraum von R kann man die Hinlänglichkeit verschiedener Eindeutigkeitskriterien in konkreten Funktionenräumen neu herleiten bzw. verallgemeinern. Wir erläutern diese Herleitung an einem sehr einfachen Beispiel der linearen Tschebyscheff-Approximation im Raume $C[Q]$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum Q.

BEISPIEL 5. Es sei V ein linearer Teilraum der Dimension n von $C[Q]$, der der Haarschen Bedingung genügt, d.h. für alle v, v_0 aus V mit $v \neq v_0$ hat die Differenz $v - v_0$ höchstens $n - 1$ Nullstellen in Q. Man überlegt sich ferner leicht, daß jede Extremalsignatur für v_0 aus V bezüglich V mindestens $n + 1$ Elemente enthält. Wegen der Darstellung der Extremalfunktionale von $S_{C[Q]^*}$ durch

$$f \to \epsilon \cdot f(x)$$

mit x aus Q und $\epsilon \in \mathbb{C}$, $|\epsilon| = 1$, folgt aus der Haarschen Bedingung, daß für alle v, v_0 aus V und jede Extremalsignatur E für v_0 bezüglich V mindestens ein L aus E existiert mit $L(v - v_0) \neq 0$. Dann ist nach Satz 14 V eine Tschebyscheff-Menge.

Es sei bemerkt, daß in diesem Fall die Bedingung von Satz 14 auch notwendig ist. Man kann sogar zeigen, daß diese Bedingung auch für Kolmogoroff-Mengen 1. Art im Raume $C[Q, H]$ notwendig und hinreichend für die eindeutige Lösbarkeit des Approximationsproblems ist (vgl. Brosowski [9]). Jedoch ist im allgemeinen diese Bedingung keine notwendige Bedingung. Das zeigen die Untersuchungen von Brosowski [6, 11], Brosowski und Loeb [15], Brosowski und Stoer [16] und Müller [25] über die Tschebyscheff-Approximation differenzierbarer oder analytischer Funktionen.

Literatur

1. I. Arold, "Zur Charakterisierung von Minimallösungen in der L_1-Approximation," Zulassungsarbeit, München 1968.
2. W. Breckner und J. Kolumban, Théorèmes de caractérisation des éléments de la meilleure approximation, *C. R. Acad. Sci. Paris* **266** (1968), 206–208.
3. W. Breckner und J. Kolumban, Über die Charakterisierung von Minimallösungen in linearen normierten Räumen, *Mathematica (Cluj)* **10** (1968), 33–46.
4. B. Brosowski, Über Tschebyscheffsche Approximationen mit verallgemeinerten rationalen Funktionen, *Math. Z.* **90** (1965), 140–151.
5. B. Brosowski, Über Tschebyscheffsche Approximationen durch asymptotisch konvexe Funktionenfamilien. *Computing* **1** (1966), 215–223.
6. B. Brosowski, Tschebyscheffsche Approximationen an differenzierbare Funktionen, *Z. Angew. Math. Mech.* **46** (1966), 39–40.
7. B. Brosowski, Fixed point theorems in approximation theory, Theory and Applications of Monotone Operators. Proc. NATO Advanced Study Institute Venice, 1968.
8. B. Brosowski, Einige Bemerkungen zum verallgemeinerten Kolmogoroffschen Kriterium, Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik, *ISNM* **12**, S. 25–34, Birkhäuser-Verlag (1969).
9. B. Brosowski, "Nicht-lineare Tschebyscheff-Approximation," B. I. Hochschulskripten, Bd. 808/808a, Bibliographisches Institut Mannheim, 1968.
10. B. Brosowski, "Nichtlineare Approximation in normierten Vektorräumen," Abstract Spaces and Approximation, *ISNM* **10**, S. 140–159, Birkhäuser-Verlag (1969).
11. B. Brosowski, Rationale Tschebyscheff-Approximation differenzierbarer Funktionen, *in* "Numerische Mathematik, Differentialgleichungen, Approximationstheorie," pp. 229–250, Birkhäuser-Verlag Basel und Stuttgart 1968.
12. B. Brosowski, "Zur nichtlinearen Tschebyscheff-Approximation an Funktionen mit Werten in einem unitären Raum," *Mathematica II* **(34)** (1969), 53–60.
13. B. Brosowski, Fixpunktsätze in der Approximationstheorie, *Mathematica II* **(34)** (1969), 195–220.
14. B. Brosowski, On the necessity of the generalized Kolmogorov criterion, *Notices Amer. Math. Soc.* **16** (1969), 643.

15. B. Brosowski und H. L. Loeb, Zur Eindeutigkeit der rationalen Tschebyscheff-Approximationen an stetig differenzierbare Funktionen, *Numer. Math.* **10** (1967), 51–55.
16. B. Brosowski und J. Stoer, Zur rationalen Tschebyscheff-Approximation differenzierbarer und analytischer Funktionen, *Numer. Math.* **12** (1968), 57–65.
17. B. Brosowski und H. Weber, Zum Begriff der Regularität in normierten Vektorräumen, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, *MPI-PAE/Astro* **10**/68 (1969).
18. B. Brosowski, K. H. Hoffmann, E. Schäfer, und H. Weber, Wann ist das Kolmogoroff-Kriterium notwendig?, Erscheint in der ZAMM.
19. B. Brosowski, K. H. Hoffmann, E. Schäfer, und H. Weber, Stetigkeitssätze für metrische Projektionen. III. Eine Fixpunkteigenschaft der metrischen Projektion, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, *MPI-PAE/Astro* **12** (1969).
20. K. H. Hoffmann, Persönliche Mitteilung 1969.
21. S. Karlin und W. Studden, "Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics," Interscience Publishers, New York/London/Sydney (1966).
22. W. Krabs, Über die Reichweite des lokalen Kolmogoroff-Kriteriums bei der nichtlinearen gleichmäßigen Approximation, *J. Approximation Theory* **2** (1969), 258–264.
23. M. C. Lobry, "Étude geométrique des problèmes d'optimisation en présence de contraintes," Thèse, Grenoble, 1967.
24. G. Meinardus und D. Schwedt, Nicht-lineare Approximationen, *Arch. Rational Mech. Anal.* **17** (1964), 297–326.
25. A. Müller, Tschebyscheff-Approximation an differenzierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, *MPI-PAE/Astro* **21**/69 (1969).
26. T. J. Rivlin und H. S. Shapiro, A unified approach to certain problems of approximation and minimization, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **9** (1961), 670–699.
27. I. Singer, On the set of the best approximations of an element in a normed linear space, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **5** (1960), 383–402.
28. I. Singer, Choquet spaces and best approximation, *Math. Ann.* **148** (1962), 330–340.
29. I. Singer, Cea mai buna approximare in spatii vectoriale normate prin elemente din subspatii vectoriale, Bukarest: Academiei Republicii socialiste Romania, 1967.
30. H. Werner, "Vorlesung über Approximationstheorie," Lectures Notes in Mathematics 14, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York, 1966.